

# STOCKHOLMS UNIVERSITET

Statistiska institutionen

Jolanta Pielaszekiewicz

## TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1 2019-03-26

---

**Skrivtid:** 15.00-20.00

**Godkända hjälpmedel:** Miniräknare, språklexikon.

Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Vänligen använd inte röd penna på tentamen. Lycka till!

---

### Uppgift 1. (20 poäng)

- Ange exempel av försök som **inte** är slumpmässigt.
- Förklara begrepp:
  - Stokastisk variabel
  - Korrelation
- Man vill skriva "ord"\* med tre bokstäver som väljs från listan: S,T,A,R med återläggning. Anta att varje "ord" kommer med samma sannolikhet. Vad är sannolikhet att man skriver "ord": SAS?
- Vi har valt 10 stycken olika "ord" enligt metod givet i 1c). Emma satsar på att hon kan gissa på ett av angivna ord vid första försöket (utan någon ytterligare information. Hon vet bara det som finns på 1c)). Vi bestämmer att om hon klarar sig får hon 1000 sek, annars får vi 150 sek från Emma. Vad är Emmas förväntade vinst i ett sådan satsning?

\* "ord" defineras som antal bokstäver givet i ordning t.ex. ART, TAR, TRS, ...

### Uppgift 2. (20 poäng) 75% av konststudenterna i Stockholm studerar på Konstfack, 17% studerar på Kungliga Konsthögskolan och resten (dvs. 8%) på Beckmans konstskola. Sannolikhet att student får pris i europeisk art-tävling givet att hen är

- student hos Konstfack är 3%,
  - student hos Kungliga Konsthögskolan är 5%,
  - student hos Beckmans är 11%.
- Vad är sannolikheten för att slumpmässigt valt student studerar på Konstfack och får priset?
  - Vad är sannolikheten för att slumpmässigt valt konststudent från Stockholm får ett pris i europeisk art-tävling?
  - Vad är sannolikheten för att högst 2 av 5 slumpmässigt valda konststudenter i Stockholm fick det europeiska art-tävling priset?
  - Vad är sannolikheten för att någon studerar på Beckmans konstskola givet att hen fick priset i europeisk art-tävling?

**Uppgift 3.** (20 poäng) Företaget "Miljö+" tillverkar och säljer miljövänliga förpackningar. Efterfrågan av denna förpackningar under en vecka kan beskrivas av en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde 80 och varians 70.

- Företaget har för närvarande 100 miljövänliga förpackningar i lager. Bestäm sannolikhet att efterfrågan den närmaste veckan blir större än antal produkter man har i lager.
- Hur många förpackningar ska man ha i lager för att sannolikheten att efterfrågan överstiger lagerstorleken ska vara högst 5%?
- Under 2019 producerar företaget antal förpackningar så att sannolikheten att efterfrågan överstiger lagerstorleken är exakt 10%. Vad är sannolikhet att under högst 15 veckor i år (ett år=52 veckor) efterfrågan överstiger lagerstorleken? Använd en variabel:  $Y$ =antal veckor med efterfrågan som överstiger lagerstorleken.
- Vad är förväntade efterfrågan per år (dvs per 52 veckor)?

**Uppgift 4.** (20 poäng) En familj väljs slumpmässigt från en population av familjer, där  $X$  är antalet flickor;  $Y$  = antalet pojkar. Anta att den simultana sannolikhetsfördelningen ges i tabell:

		X = antal flickor		
		0	1	2
Y = antal pojkar	0	0.4	0.16	0.04
	1	0.17	0.08	0.02
	2	0.05	0.07	0.01

- Vad är sannolikheten att slumpmässigt utvald familjen har exakt en pojke och en flicka?
- Vad är sannolikheten att slumpmässigt utvald familjen har minst en pojke och en flicka?
- Vad är sannolikheten att slumpmässigt utvald familjen inte har några barn givet att vi vet att den inte har några pojkar?
- Bestäm om variabel  $X$  och  $Y$  är oberoende. Motivera svar.
- (9 av 20 poäng)  
Beräkna korrelation mellan antal flickor och antal barn i familjen och tolka resultatet.

**Uppgift 5.** (20 poäng)

- Beräkna  $P(3 < X \leq 6)$  för  $X \sim Bin(12, 0.3)$ .
- Beräkna  $F_X(42)$  för  $X \sim Bin(100, 0.3)$ .
- Beräkna  $P(Y - 10 \leq 150)$  för  $Y \sim N(132, \sigma^2 = 100)$ .
- Beräkna  $P(4 \leq U \leq 5)$ , där  $U \sim N(5, \sigma^2 = 2)$ .
- Beräkna varians  $Var(W+S)$ , där  $W$  är stokastisk variabel med varians  $Var(W) = 3$  oberoende av binomialfördelad stokastisk variabel  $S \sim Bin(100, 0.4)$ .
- Beräkna  $P(T = 10)$  för  $T \sim t(15)$ .

Statistiska institutionen



Stockholms  
universitet

## Rättningsblad

**Datum:** 26/3/19

**Sal:** Ugglevikssalen

**Tenta:** Statistikens grunder

**Kurs:** Statistikens grunder 1

**ANONYMKOD:**

0638-LFC

Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

**OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN**

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					8
Lär.ant. 14	20	16	20	17					

<b>POÄNG</b> 87	<b>BETYG</b> B	<b>Lärarens sign.</b> Y.Peltonen
--------------------	-------------------	-------------------------------------

1. a) Jag öppnar dörren och går in i en specifik lägenhet där jag bor. Försöket att öppna denna dörr och gå in är inte slumpmässigt eftersom det finns bara ett möjligt utfall = Jag går in i min lägenhet. 13

b) Stokastisk variabel: En variabel som inte är konstant utan kan ta olika värden beroende på sannolikhetsmätt särskilda utfall inträffar. 14

Korrelation: Det linjära sambandet mellan två stokastiska variabler. Korrelationen kan ta ett värde mellan  $-1$  och  $1$  där negativa värden visar på ett negativt samband och tvärtom,  $0$  innebär att inget linjärt samband föreligger. 14

c  $\Omega = S, T, A, R$

~~$P(S) = \frac{1}{4}$   $P(T) = \frac{1}{4}$   $P(A) = \frac{1}{4}$   $P(R) = \frac{1}{4}$~~

~~$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$~~

~~Sub  $\frac{1}{64}$~~

d

S, T, A, eller R  
 bara 3 bokstäver kvar  
 bara 2 kvar

$$1c.) \text{Antal möjliga ord} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{24}$$

du väljer bokstäver utan återläggning. Du kan inte skriva ord SAS eftersom efter du väljer SA kan du bara välja mellan T och R.

Sannolikheten att man skriver SAS är

$$\underline{\frac{1}{24}} \text{ eftersom varje ord } d \text{ har samma sannolikhet}$$

$$1d.) \frac{1}{24} \cdot 1000 + \frac{23}{24} \cdot (-150) \approx -102,0833$$

Emm du ska välja en av 10 ord som vi har valt.

1/3

10

$$2 \quad A_1 = \text{Konst fack} \quad P(A_1) = 0,75$$

$$A_2 = \text{KKH} \quad P(A_2) = 0,17$$

$$R \quad A_3 = \text{Beckman} \quad P(A_3) = 0,08$$

$B =$  vinner europeisk Art-tävling

$$P(B|A_1) = 0,03$$

$$P(B|A_2) = 0,05$$

$$R \quad P(B|A_3) = 0,11$$

$$a \quad P(A_1 \cap B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1)$$

$$R \quad 14 \quad = 0,03 \cdot 0,75 = \underline{\underline{0,0225}}$$

$$b. \quad P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

$$R \quad 0,03 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,17 + 0,11 \cdot 0,08$$

$$16 \quad = \underline{\underline{0,0398}}$$

$$c.) P(B \leq 2)$$

$$R \quad B \sim \text{Bin}(5, 0,0398)$$

$$R \quad P(B \leq 2) = P(B=0) + P(B=1) + P(B=2)$$

$$\binom{5}{0} \cdot 0,0398^0 \cdot 0,9602^5 \approx 0,8162$$

$$\binom{5}{1} \cdot 0,0398^1 \cdot 0,9602^4 \approx 0,1691$$

$$\binom{5}{2} \cdot 0,0398^2 \cdot 0,9602^3 \approx 0,0140$$

$$R \quad 0,8162 + 0,1691 + 0,0140 = \underline{0,9993} \quad \text{b) 1/6}$$

$$d.) P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)}$$

$$= \frac{0,11 \cdot 0,08}{0,03 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,17 + 0,11 \cdot 0,08}$$

$$= \underline{0,11 \cdot 0,08}$$

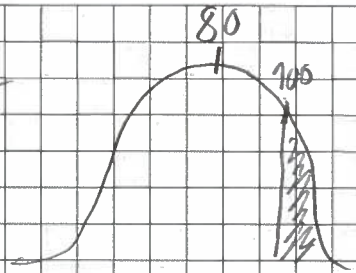
$$0,03 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,17 + 0,11 \cdot 0,08$$

R

$$\frac{0,0088}{0,0398} \approx \underline{0,2211} \quad \text{1/4}$$



3  $X =$  efterfrågan för förpackningar  
 $X \sim N(80, \sigma^2 = 70)$



a.  $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100)$

$$\frac{(100 - 80)}{8,3666} \approx 2,39$$

$$8,3666$$

$$\Phi(2,39) = 0,99158$$

$$1 - 0,99158 = \underline{0,00842}$$

R

1/4

b.  $P(X > x_1) = 0,05 = \Phi^{-1}(0,95)$

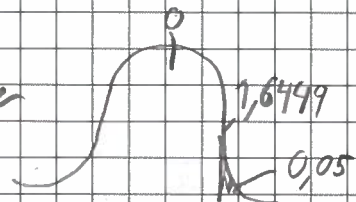
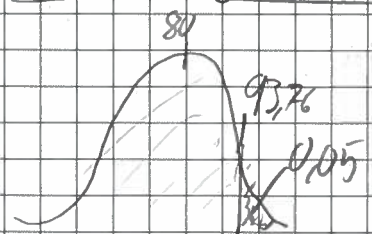
$$\frac{x_1 - 80}{8,3666} = 1,6449$$

$$x_1 = 1,6449 \cdot 8,3666 + 80$$

$$x_1 \approx \underline{93,76} \text{ förpackningar i lager}$$

(max. blir man avrund nedåt till  
 93 förpackningar)

$x_1 =$  förpackningar  
 i lager



1/6

$$c. P(X > x_1) = 0,1$$

A = överstoser lagret

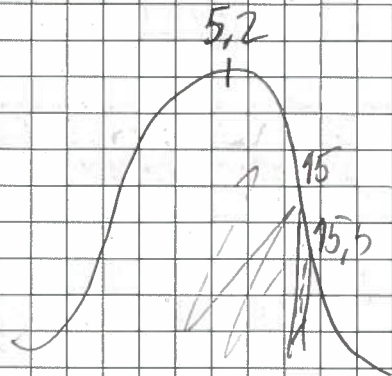
Y = antal veckor som efterfrågan överstoser lagret.

$$A \sim \text{bin}(52, 0,1)$$

Normalfördelnings approximation

$$R \quad \mu = 52 \cdot 0,1 = 5,2 \quad \underline{\geq 5}$$

$$\sigma^2 = 52 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 4,68$$



$$R \quad Y \sim N(5,2, \sigma^2 = 4,68)$$

$$P(Y \leq 15)$$

Kontinuitets korrektion  $15 \rightarrow 15,5$

$$R \quad \frac{(15,5 - 5,2)}{2,16333} \approx 4,7692$$

$$\Phi(4,76) \approx \underline{1}$$

Sannolikheten att efterfrågan överstoser lagret högst 15 veckor är i näst intill 1, med andra ord ca. 100%.

d. Förväntad efterfrågan = väntevärde = 80 ← undervärdet

4.)  $X =$  antal flickor  
 $Y =$  antal pojkar

a.)

		X			
		0	1	2	$f(x)$
Y	0	0,4	0,16	0,04	0,6
	1	0,17	0,08	0,02	0,27
	2	0,05	0,07	0,01	0,13
		0,62	0,31	0,07	1

$$a.) P(Y=1 \cap X=1) = \underline{0,08} \quad R \quad /2$$

$$b.) P(Y \geq 1 \cap X \geq 1) = P(Y=1 \cap X=1) + P(Y=2 \cap X=1) \\ + P(Y=1 \cap X=2) + P(Y=2 \cap X=2) \\ = 0,08 + 0,02 + 0,07 + 0,01 \\ = \underline{0,18} \quad R \quad /3$$

$$c.) P(X=0 \cap Y=0 \mid Y=0) = \frac{P(X=0 \cap Y=0 \cap Y=0)}{P(Y=0)} \\ = \frac{0,4}{0,6} \approx \underline{0,67} \quad R \quad /3$$

d. oberoende =  $P(X) \cdot P(Y) = P(X \cap Y)$

test exempel =  $P(X=0) \cdot P(Y=0)$

=  $0,62 \cdot 0,6 \neq 0,4$

X och Y är inte oberoende

R / 3

4e)

$$R \quad E(X) = 1 \cdot 0,31 + 2 \cdot 0,07 = \underline{0,45}$$

$$Var(X) = (0 - 0,45)^2 \cdot 0,62 + (1 - 0,45)^2 \cdot 0,31 + (2 - 0,45)^2 \cdot 0,07$$

$$R \quad = \underline{0,3875} \quad 1/2$$

$$R \quad E(Y) = 1 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,13 = \underline{0,53}$$

$$Var(Y) = (0 - 0,53)^2 \cdot 0,6 + (1 - 0,53)^2 \cdot 0,27 + (2 - 0,53)^2 \cdot 0,13$$

$$R \quad = \underline{0,5091} \quad 1/2$$

$$\underline{E(X+Y)} = E(X) + E(Y) = 0,45 + 0,53 = \underline{0,98} \quad \text{bta!}$$

$$Cov_{XY} = 1 \cdot 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 2 \cdot 0,07 + 2 \cdot 2 \cdot 0,01$$

$$- 0,45 \cdot 0,53$$

$$= 0,0615 \quad R \quad \leftarrow 1/2$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov_{XY}$$

$$= 0,3875 + 0,5091 + 2 \cdot 0,0615$$

$$= \underline{1,0796} \quad \text{bta}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{X, X+Y} &= 1 \cdot 1 \cdot 0,16 + 2 \cdot 2 \cdot 0,04 + 1 \cdot 2 \cdot 0,08 + 2 \cdot 3 \cdot 0,02 \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 0,07 + 2 \cdot 4 \cdot 0,01 = 0,45 - 0,98 \\ &= 0,89 - 0,449 = \underline{0,449} = 0,3875 + 0,0615 \end{aligned}$$

blom

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{X, X+Y} &= \frac{0,449}{\sqrt{0,3875 \cdot 1,019675}} \neq \underline{0,447} \\ &\quad \text{beräkningsfel} \end{aligned}$$

Det linjära sambandet mellan antal  
fläckar och antal barn är positivt. Och  
Medel starkt.

13

19

5

$$a) X \sim \text{Bin}(12, 0.3)$$

$$P(3 < X \leq 6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$P(X=4) = \binom{12}{4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^8 \approx 0.23114$$

$$P(X=5) = \binom{12}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^7 \approx 0.15849$$

$$P(X=6) = \binom{12}{6} \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^6 \approx 0.07925$$

$$P(3 < X \leq 6) = \underline{0.46888} \quad R \quad /3$$

$$b) F_X(42) \quad X \sim \text{Bin}(100, 0.3)$$

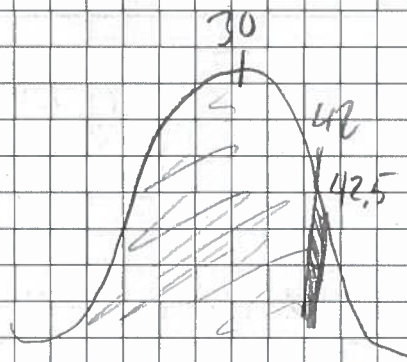
$$F_X(42) = P(X \leq 42)$$

Normal approx.

$$N = 100 \cdot 0.3 = 30$$

$$\sigma^2 = 100 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 21$$

$$X \sim N(30, \sigma^2 = 21)$$



$$\frac{(42.5 - 30)}{4.5826} \approx 2.73 \quad R$$

$$4.5826$$

$$\Phi(2.73) = \underline{0.99683} \quad /4$$

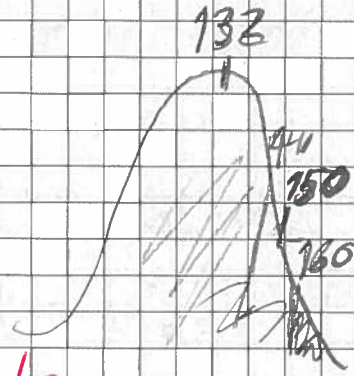
$$c. P(Y - 10 \leq 150) \quad Y \sim N(132, \sigma^2 = 100)$$

$$\equiv P(Y \leq 160)$$

$$\frac{(160 - 132)}{10} = 2,8$$

$$\Phi 2,8 = \underline{0,99744}$$

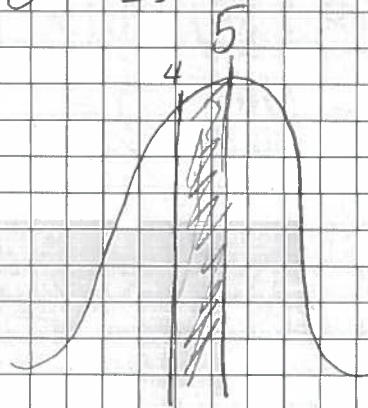
R / 3



$$d. P(4 \leq U \leq 5) \quad U \sim N(5, \sigma^2 = 2)$$

$$= P(U \leq 5) - P(U \leq 4)$$

$$= 0,5 - P(U \leq 4)$$



$$\frac{(4 - 5)}{1,414} \approx -0,7$$

$$\Phi -0,7 = 0,24196$$

$$0,5 - 0,24196 = \underline{0,25804}$$

R / 4



5e.) Var(W+S)?

$$S \sim \text{Bin}(100, 0.4)$$

$$\text{Var}(S) = 100 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = \underline{24}$$

$$\text{Var}(W) = \underline{3}$$

$$\text{Var}(W+S) = 3 + 24 = \underline{27} \quad R/S$$

f.)  $P(T=10) \quad T \sim (15)$

$$P(T=10) = P(9 < T < 11) =$$

$$= 1 - (P(T \geq 11) + P(T \leq 9)) \quad 10$$



